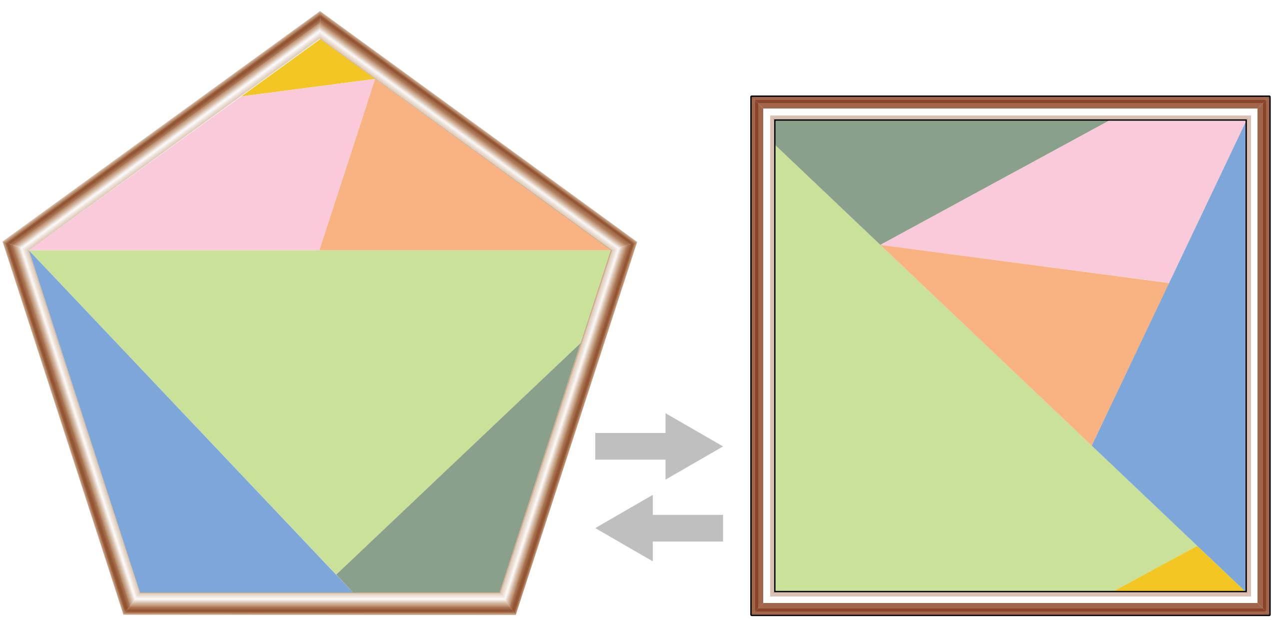
Les puzzles polygonaux

Vers 1830, le jeune Janos Bolyai, découvreur de la géométrie non-euclidienne, démontra une remarquable propriété des polygones : “Étant donnés deux polygones de même aire, il est possible de découper l’un d’entre eux en morceaux de manière à pouvoir reconstituer exactement l’autre !”.

Le puzzle carré-pentagone

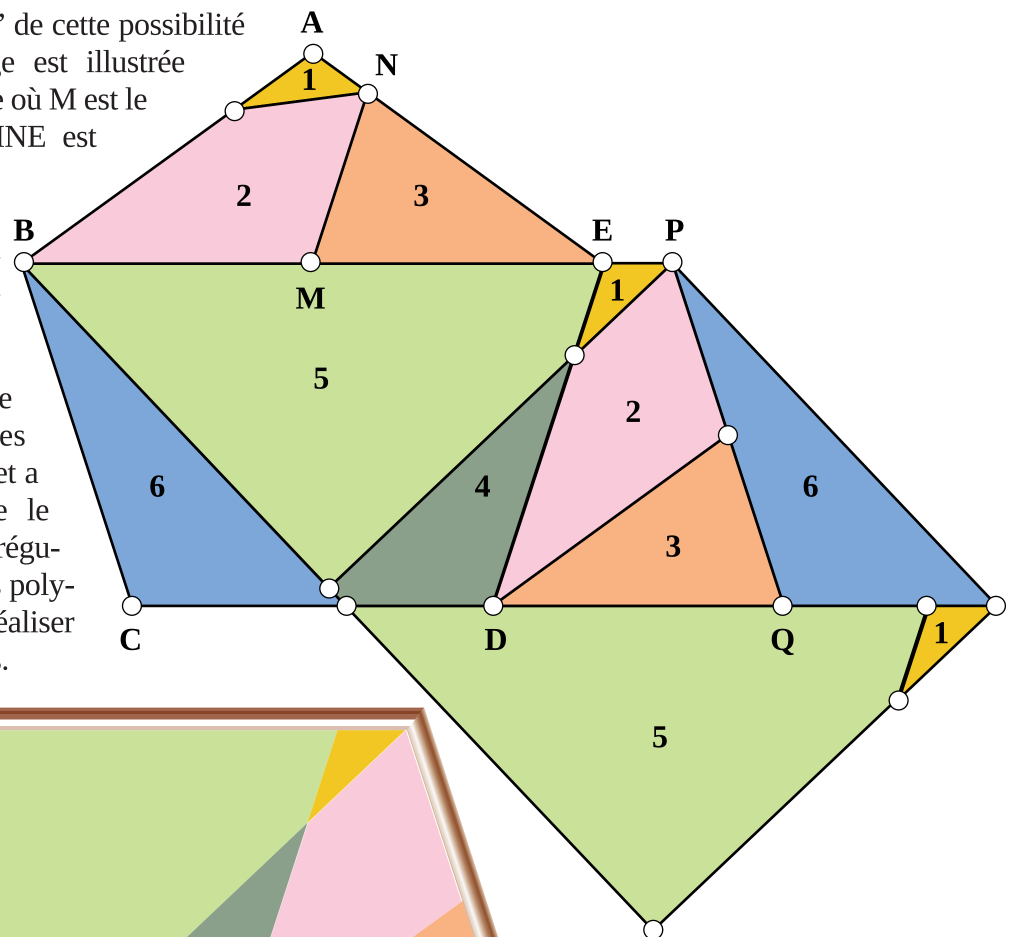
Voici un étonnant puzzle dont les 6 pièces peuvent indifféremment s’assembler pour former un carré mais aussi un pentagone régulier.

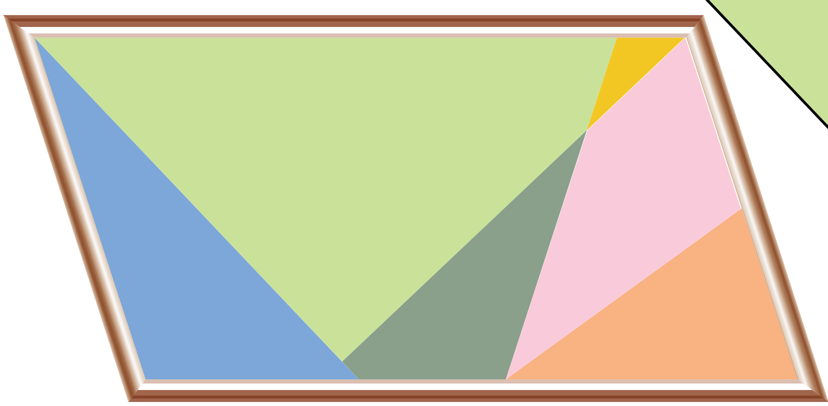


La “démonstration” de cette possibilité de double assemblage est illustrée dans la figure ci-contre où M est le milieu de [BE] et MNE est isocèle !

Vous pouvez alors vérifier que BPQC est un parallélogramme et que tout s’agence avec bonheur.

Ce parallélogramme est aussi formé des mêmes six morceaux et a donc même aire que le carré ou le pentagone régulier. Ce sont donc trois polygones que l’on peut réaliser avec les mêmes pièces.





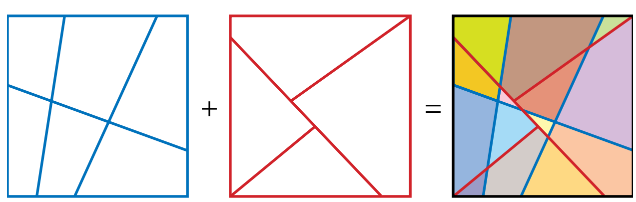
De Pythagore à Bolyai

Plus généralement donc, et comme annoncé précédemment, deux polygones quelconques de même aire peuvent se décomposer en les mêmes morceaux.

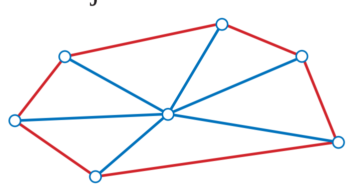
La démonstration est suffisamment simple pour que nous vous l’offrions.

■ Il suffit de montrer qu’un polygone peut se décomposer en morceaux pouvant reconstituer un carré.

En effet, soient deux polygones P et Q de même aire, si chacun peut se décomposer en morceaux pour former un carré, il ne peut s’agir que du même “carré” (puisque son aire est celle commune aux polygones). La superposition des deux découpages dans le carré donne un découpage permettant de reconstituer soit P, soit Q.

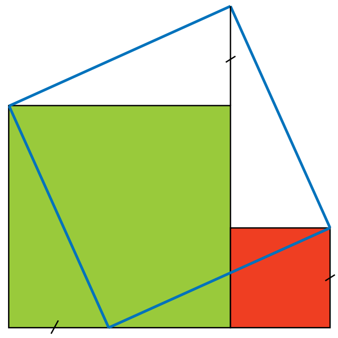


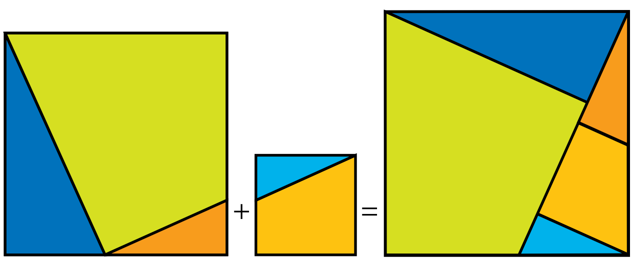
■ Or tout polygone peut se découper en triangles (prendre par exemple un point à l’intérieur du polygone et le joindre à chacun des sommets).



Il suffit donc de montrer qu’un certain nombre de triangles peuvent se découper pour reconstituer un carré.

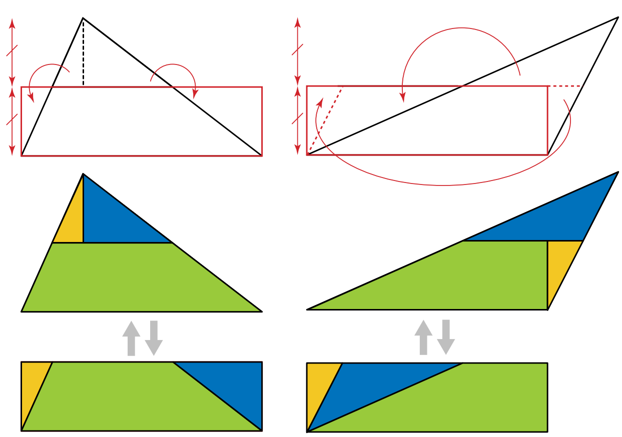
■ Si nous montrons qu'un seul triangle peut se découper pour reconstituer un carré nous aurons gagné. En effet, alors n triangles donneront n carrés ; et il connu que deux carrés peuvent se découper pour en reconstituer un troisième (et donc de 7 carrés (5 + 2), on peut en faire 6 (5 + 1) ; puis de 6 (4 + 2), on peut en faire 5 (4 + 1), … ainsi jusqu'à obtenir un seul carré. C'est le fameux théorème de Pythagore dont une démonstration par le truchement d'un puzzle est ici rappelée :





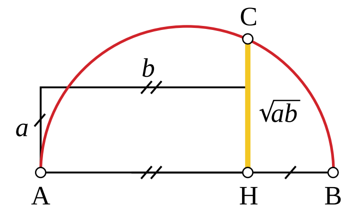
■ Il reste donc à montrer que l'on peut découper un triangle pour reconstituer un carré. Cela peut se faire en passant par l'intermédiaire d'un rectangle.

Voici comment, selon que le triangle est obtus ou non.



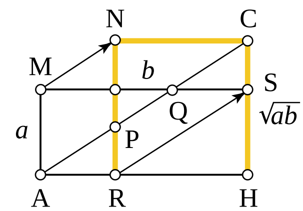
■ Il reste à passer du rectangle au carré.

La première chose à faire est de trouver le côté du carré pour pouvoir le dessiner. La figure suivante aboutit à ce résultat.

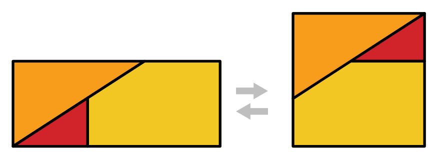


On trace un demi-cercle de diamètre égal au demi-périmètre du rectangle. La demi-corde jaune mesure le côté du carré cherché (cela vient du fait que, dans le triangle rectangle ABC, la hauteur CH vérifie $CH^2 = HA \cdot HB$.

La construction à faire alors est valable non seulement pour passer d'un rectangle à un carré mais pour passe d'un rectangle à un autre rectangle de même aire.



La translation de vecteur MN amène le triangle APR sur le triangle QSC.



Note : La construction précédente échoue si le rectangle est "trop long". Mais on peut alors effectuer des découpages successifs se ramenant à un rectangle plus "équilibré".

Et voilà !

Information du dernier siècle

On peut se poser le problème analogue dans l'espace : "*Étant donnés deux polyèdres (solides limités par des surfaces planes) de même volume est-il possible de découper l'un d'entre eux en morceaux de manière à pouvoir reconstituer l'autre ?*".

Ce problème était le troisième posé par David Hilbert au congrès des mathématiciens à Paris en 1900 (parmi la liste des 23 problèmes à résoudre, selon lui, au XX^{e} siècle).

La réponse est surprenante, extraordinaire et riche d'enseignement sur la troisième dimension de notre espace : c'est NON !